

Preuve : Atteinte d'un zéro dans le problème des bidons

Énoncé du problème

On dispose de trois bidons contenant des quantités entières strictement positives d'eau, notées (a, b, c) avec :

- $a, b, c \in \mathbb{N}_1$ (entiers strictement positifs),
- $a \leq b \leq c$,
- $a + b + c = C$ (constante).

À chaque étape, on peut appliquer une transformation qui consiste à **doubler la quantité d'un bidon et soustraire cette quantité d'un autre bidon**, tout en conservant le volume total C . L'objectif est d'atteindre un état où l'un des bidons est vide (c'est-à-dire $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$).

Question : Peut-on toujours atteindre un zéro en un nombre fini d'étapes ?

Réponse

Oui, on aboutit toujours à un zéro en un nombre fini d'étapes.

Preuve par ordre lexicographique

On considère un état donné par un triplet (a, b, c) avec $0 < a \leq b \leq c$. On définit la paire $(M, m) = (c, a)$, où :

- M est le maximum des trois valeurs (ici c),
- m est le minimum des trois valeurs (ici a).

L'idée est de montrer qu'à chaque étape, on peut choisir une transformation qui **diminue strictement** cette paire dans l'**ordre lexicographique** (c'est-à-dire que soit M diminue, soit M reste égal et m diminue).

Pourquoi cette paire ?

- M et m sont des entiers bornés : $M \leq C - 2$ (car $a + b \geq 2$) et $m \geq 1$.
 - Il n'y a donc qu'un nombre fini de paires possibles (M, m) .
 - Si on peut toujours diminuer cette paire, le processus doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes.
-

Cas par cas

Cas 1 : $b < 2a$ ou $c < a + b$

Sous-cas 1.1 : $b < 2a$

- Transformation appliquée : $(a, b, c) \rightarrow (2a, b - a, c)$.
- Comme $b < 2a$, alors $b - a < a$.
- Le nouveau minimum est donc $b - a < a$, soit $m' < m$.
- Résultat : La paire (M', m') est strictement plus petite que (M, m) (car $m' < m$).

Sous-cas 1.2 : $c < a + b$

- Transformation appliquée : $(a, b, c) \rightarrow (a, 2b, c - b)$.
 - Comme $c < a + b$, alors $c - b < a$.
 - Le nouveau minimum est donc $c - b < a$, soit $m' < m$.
 - Résultat : La paire (M', m') est strictement plus petite que (M, m) (car $m' < m$).
-

Cas 2 : $b \geq 2a$ et $c \geq a + b$

- On a alors $c \geq a + b \geq a + 2a = 3a$, donc $c > a$.
 - Transformation appliquée : $(a, b, c) \rightarrow (2a, b, c - a)$.
 - Comme $c \geq a + b$, alors $c - a \geq b$.
 - Le nouveau triplet trié est $(2a, b, c - a)$, avec $2a \leq b \leq c - a$.
 - Le nouveau maximum est $c - a < c$, soit $M' < M$.
 - Résultat : La paire (M', m') est strictement plus petite que (M, m) (car $M' < M$).
-

Conclusion

- Dans tous les cas, on peut choisir une transformation qui diminue strictement la paire (M, m) dans l'ordre lexicographique.
- Comme cette paire est bornée et ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, le processus s'arrête nécessairement après un nombre fini d'étapes.
- L'arrêt ne peut survenir que lorsqu'un bidon est vide (car sinon, on peut toujours appliquer une transformation).

✅ Donc, on aboutit toujours à un zéro en un nombre fini d'étapes.

Exemple

Prenons l'exemple $(1, 2, 3)$:

1. Appliquer la transformation doubler $a = 1$ et soustraire de $c = 3$: $(2, 2, 2)$.
 2. Appliquer la transformation doubler $a = 2$ et soustraire de $b = 2$: $(4, 0, 2)$.
-

Remarques

- Cette preuve repose sur l'ordre lexicographique et la finitude des états possibles.
- La clé est de montrer que, quelle que soit la configuration initiale, on peut toujours faire diminuer une quantité bien choisie.
- La transformation choisie dépend de la configuration actuelle, mais il existe toujours une option qui garantit une progression vers l'objectif.